

ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية كمدخل عملي لتعليم الرياضيات

م. مزينه طارق نعمان

وزارة التربية الكلية التربوية المفتوحة قسم الرياضيات

Connecting Differential Equations to Everyday Problems as a Practical Approach to Teaching Mathematics

Zeinaww1989@gmail.com

المستخلص

يهدف هذا البحث إلى بيان دور ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية في جعل تعليم الرياضيات أكثر فهماً وتطبيقاً، من خلال مدخل عملي يقوم على النمذجة الرياضية وتحليل الظواهر المتغيرة. وتتعلق فكرة البحث من أن المعادلات التفاضلية ليست مجرد صيغ رمزية أو إجراءات جبرية، بل أداة لوصف العلاقة بين الكمية المتغيرة ومعدل تغيرها، مثل العلاقة بين $y(t)$ و dy/dt ، مما يساعد المتعلم على فهم معنى التغير وتفسيره والتنبؤ بسلوك الظاهرة. يعتمد البحث على المنهج الوصفي التحليلي، من خلال تناول مشكلات يومية تتضمن تغيراً مستمراً مع الزمن، مثل تبريد الأجسام، ونمو الكائنات الحية، وانتشار الأمراض، وحركة الأجسام، واستهلاك الموارد. ويتم تحليل هذه المشكلات وفق خطوات النمذجة الرياضية، بدءاً من تحديد الظاهرة ومتغيراتها، ثم صياغتها في صورة معادلة تفاضلية، وصولاً إلى تفسير النموذج الرياضي في ضوء المشكلة الأصلية. وتوصل البحث إلى أن ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية يساهم في تقليل التجريد، وتعزيز الفهم المفاهيمي، وتنمية مهارات حل المشكلات، وزيادة دافعية الطلبة نحو تعلم الرياضيات. كما يساعد هذا المدخل على نقل الطالب من حفظ طرائق الحل إلى فهم وظيفة المعادلة التفاضلية بوصفها نموذجاً يفسر الظواهر المتغيرة ويتنبأ بسلوكها.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية، المشكلات اليومية، النمذجة الرياضية، تعليم الرياضيات، معدل التغير، التفكير الرياضي.

Abstract

The objective of this research is to show how the relationship between differential equations and real world problems, using a global approach where specific aspects such as mathematical modeling and the study of changing phenomena can be analyzed, helps in making mathematics teaching one that is much more meaningful. The reasoning about the research is based on a perception that it isn't just symbolic formula or algebraic processes, instead differential equations are mathematical expressions of how a dynamic value like $y(t)$ relates to its rate of change dy/dt . This will help learners in comprehending the definition of change, deciphering the reasons behind it and forecasting how a phenomenon behaves. The study follows the descriptive analytical approach by studying daily issues that are subjected to continuous change through periods of time. The process of cooling bodies, growth in living organisms, disease spread, motion and movement of bodies, consumption. These problems are investigated along the steps of a mathematical modeling procedure, starting from identifying the phenomenon and its associated variables moving on to formulating it into a differential equation or system of equations to interpreting this mathematical model in terms of original problem. This research has highlighted how linking differential equations to everyday problems addresses abstraction, deepens conceptual understanding, strengthens problem-solving abilities and motivates students to learn mathematics. It also gives a way of moving students from memorization of procedures to the essential understanding that a differential equation is a model that describes changing phenomena and predicts their responses.

Keywords: Differential equations, everyday problems, mathematical modeling, mathematics teaching, rate of change, mathematical thinking.

تُعَدّ المعادلات التفاضلية من الموضوعات الرياضية المهمة التي تقوم على دراسة التغير، إذ لا تكتفي بوصف قيمة الكمية في لحظة معينة، بل تهتم بوصف كيفية تغيرها مع الزمن أو مع متغيرات أخرى. فعندما تكون $y(t)$ كمية متغيرة، فإن المشتقة:

$$\frac{dy}{dt}$$

تمثل معدل تغير هذه الكمية بالنسبة إلى الزمن، وبذلك تصبح المعادلة التفاضلية أداة رياضية لفهم العلاقة بين الكمية المتغيرة ومعدل تغيرها. وتظهر أهمية هذا النوع من المعادلات في كثير من الظواهر الواقعية مثل تغير درجة الحرارة، ونمو الكائنات الحية، وانتشار الأمراض، وحركة الأجسام، والدوائر الكهربائية، واستهلاك الموارد [2]

لا تقتصر قيمة المعادلات التفاضلية على الجانب النظري، بل تمتد إلى قدرتها على بناء نماذج رياضية تفسر الظواهر اليومية. فمثلاً، يمكن تمثيل تبريد جسم ساخن بالمعادلة:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

حيث تمثل $T(t)$ درجة حرارة الجسم، ويمثل T_s درجة حرارة الوسط المحيط، بينما يمثل k ثابت التبريد. ومن خلال هذا النموذج يستطيع الطالب أن يفهم أن التبريد يكون سريعاً عندما يكون الفرق بين درجة حرارة الجسم والوسط كبيراً، ثم يتباطأ تدريجياً كلما اقتربت درجة حرارة الجسم من درجة حرارة الوسط. وهذا يوضح أن المعادلة التفاضلية لا تقدم حلاً جبرياً فقط، بل تقدم تفسيراً رياضياً لسلوك الظاهرة [1,2] وعلى الرغم من أهمية المعادلات التفاضلية في تفسير الظواهر الواقعية، فإن تدريسها في كثير من الأحيان يظل قائماً على المعالجة الرمزية وطرائق الحل التقليدية، مثل فصل المتغيرات أو استخدام العوامل التكاملية، دون ربط كافٍ بالمواقف اليومية التي نشأت عنها هذه المعادلات. وهذا قد يؤدي إلى ضعف فهم الطلبة لمعنى المشتقة ومعدل التغير، ويجعلهم يتعاملون مع المعادلة بوصفها رمزاً مجرداً لا أداة لتفسير الواقع. لذلك تؤكد الدراسات التربوية الحديثة أهمية الانتقال من التعليم القائم على الإجراءات إلى التعليم القائم على الفهم والنمذجة والتمثيل البصري [3] من هنا تبرز أهمية ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية بوصفه مدخلاً عملياً لتعليم الرياضيات. فهذا الربط يساعد المتعلم على الانتقال من ملاحظة الظاهرة إلى تحديد متغيراتها، ثم صياغة العلاقة بين الكمية ومعدل تغيرها، وصولاً إلى بناء نموذج تفاضلي وتحليل نتائجه. وبذلك يصبح تعلم المعادلات التفاضلية قائماً على الفهم والتفسير والتنبؤ، لا على الحفظ والتطبيق الآلي فقط. كما أن استخدام الرسوم البيانية، والجداول، والبرمجيات التعليمية يمكن أن يعزز قدرة الطالب على رؤية سلوك الحلول وفهم العلاقة بين النموذج الرياضي والظاهرة الواقعية [4] وبناءً على ذلك، يسعى هذا البحث إلى إبراز دور المشكلات اليومية في تعليم المعادلات التفاضلية، من خلال تقديم تصور عملي يربط بين الظاهرة الواقعية والنموذج الرياضي. ويركز البحث على أمثلة تطبيقية مثل تبريد الأجسام، والنمو السكاني، وانتشار الأمراض، وحركة الأجسام، بهدف توضيح كيف يمكن تحويل هذه الظواهر إلى معادلات تفاضلية قابلة للتحليل والتفسير. كما يهدف البحث إلى بيان أثر هذا المدخل في تنمية الفهم المفاهيمي، وتعزيز التفكير الرياضي، وزيادة دافعية الطلبة نحو تعلم الرياضيات [2]

٢ - الدراسات السابقة

تناول **Lozada, Guerrero-Ortiz, Coronel, and Medina (2021)** منهجيات تدريس وتعلم المعادلات التفاضلية العادية من خلال مراجعة منهجية وتحليل بيبليومتري للدراسات المنشورة في هذا المجال. وقد هدفت الدراسة إلى تحديد الاتجاهات البحثية الرئيسة في تعليم المعادلات التفاضلية، وبيان التحولات التي طرأت على طرائق تدريسها. وأظهرت النتائج أن تعليم المعادلات التفاضلية لم يعد مقتصرًا على الأساليب التقليدية القائمة على الحلول الرمزية، بل اتجه نحو توظيف التمثيلات البيانية والعديدية، والتعلم النشط، والنمذجة الرياضية، والتكنولوجيا التعليمية. وتكمن أهمية هذه الدراسة بالنسبة إلى البحث الحالي في أنها تؤكد الحاجة إلى مداخل تعليمية تربط المعادلات التفاضلية بسياقات تطبيقية تساعد الطلبة على فهم المعنى الرياضي بدلاً من الاكتفاء بالإجراءات الجبرية [3] كما قدم **Lozada, Guerrero-Ortiz, Coronel, and Medina (2023)** دراسة حديثة حول تصميم نشاط قائم على النمذجة الرياضية لتيسير تعلم مفاهيم المعادلات التفاضلية العادية. اعتمدت الدراسة على تحليل عمليات تعلم الطلبة أثناء حل مهام صُممت في سياقات موقفية، ضمن تسلسل تعليمي امتد خلال مقرر دراسي. وأشارت النتائج إلى أن الأنشطة السياقية تساعد الطلبة على بناء معانٍ أكثر عمقاً لمفاهيم المعادلة التفاضلية والحل التفاضلي، كما تساهم في تنمية قدرتهم على تفسير الحدود والمتغيرات الموجودة في المعادلة في ضوء الظاهرة المدروسة. وتدعم هذه الدراسة توجه البحث الحالي في اعتماد المشكلات اليومية بوصفها

مدخلاً لبناء الفهم المفاهيمي للمعادلات التفاضلية [4]. ودرس (Latifi, Esegir, Elmaroufi, Hattaf, and Achtaich (2022) أثر
توظيف برنامج GeoGebra في نمذجة المعادلات التفاضلية ضمن تعليم الرياضيات في المرحلة الثانوية. وقد اعتمدت الدراسة تصميمًا تجريبيًا
قارن بين مجموعة تجريبية استخدمت GeoGebra ومجموعة ضابطة درست دون استخدامه، واستمرت التجربة خمسة أسابيع في موضوع
المعادلات التفاضلية. وبينت النتائج أن استخدام GeoGebra أسهم في تحسين تعلم النمذجة الرياضية، لأنه أتاح للطلبة تمثيل المشكلات بصريًا
وتحليل سلوك الحلول بصورة أكثر تفاعلية. وتبرز أهمية هذه الدراسة في دعم فكرة أن تعليم المعادلات التفاضلية يصبح أكثر فاعلية عندما يجمع
بين الموقف الواقعي، والنموذج الرياضي، والتمثيل البصري [5]. تناول Winkel (2016) تدريس المعادلات التفاضلية من خلال مدخل يبدأ
بالنمذجة قبل الانتقال إلى طرائق الحل التحليلية. وقد ركزت الدراسة على أن تقديم المعادلات التفاضلية من خلال مشكلات واقعية يساعد الطلبة
على إدراك سبب ظهور المعادلة ومعنى المتغيرات والعلاقات داخلها. وأكدت الدراسة أن البدء بالنموذج الواقعي، ثم الانتقال إلى الحل الرياضي،
يجعل تعلم المعادلات التفاضلية أكثر ارتباطًا بالفهم المفاهيمي بدلاً من الاقتصار على الإجراءات الرمزية. وتقيد هذه الدراسة البحث الحالي في
دعم فكرة أن المشكلات اليومية يمكن أن تكون نقطة انطلاق فعالة لتعليم المعادلات التفاضلية [6]. ودرس Kwon (2002) توظيف مدخل
الرياضيات الواقعية في تعليم وتعلم المعادلات التفاضلية العادية، حيث انطلقت الدراسة من فكرة أن المفاهيم الرياضية تصبح أكثر قابلية للفهم
عندما تُبنى من مواقف واقعية ذات معنى للمتعلمين. وقد بينت الدراسة أن استخدام السياقات الواقعية في تدريس المعادلات التفاضلية يساعد الطلبة
على الربط بين التمثيل الرياضي والظاهرة الأصلية، كما يعزز قدرتهم على تفسير الحلول في ضوء المشكلة الواقعية. وتتسجم هذه الدراسة مع
البحث الحالي في اعتماد المشكلات اليومية مدخلاً لبناء الفهم الرياضي [7]. وتناول Huber (2010) تدريس المعادلات التفاضلية باستخدام
النمذجة والتكنولوجيا، مركزاً على تحويل المشكلات الواقعية إلى نماذج رياضية، ثم حل هذه النماذج وتفسير نتائجها. وأوضحت الدراسة أن استخدام
التكنولوجيا والتمثيلات البيانية يساعد الطلبة على متابعة سلوك الحلول وفهم العلاقة بين المعادلة والظاهرة المدروسة. وتبرز أهمية هذه الدراسة
في تأكيدها أن تعليم المعادلات التفاضلية ينبغي أن يتضمن خطوات النمذجة كاملة، من صياغة المشكلة إلى تفسير النتائج، وهو ما يتوافق مع
هدف البحث الحالي [8]. أما Guzovorovich (2020) فقد تناولت النمذجة الرياضية والتطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية، مؤكدة أن دراسة
المشكلات التطبيقية في مقرر المعادلات التفاضلية ترتبط مباشرة بمفهوم النموذج الرياضي. وأشارت الدراسة إلى أن تعليم الطلبة كيفية بناء
النموذج من الظاهرة الواقعية يُعد من المهام الرئيسة في تعليم الرياضيات، لأن ذلك يساعدهم على فهم أن استخدام الرياضيات لا يقتصر على
حل مسائل جاهزة، بل يمتد إلى تحليل العمليات والظواهر في الواقع. وتدعم هذه الدراسة توجه البحث الحالي نحو جعل المشكلات اليومية أساساً
لبناء النموذج التفاضلي [9]. وركز Ang (2013) على تعليم وتعلم النمذجة الرياضية باستخدام التكنولوجيا، مبيناً أن النموذج الرياضي يمثل
تبسيطاً أو تجريداً لمشكلة واقعية معقدة في صورة رياضية قابلة للتحليل. وأكدت الدراسة أن التكنولوجيا يمكن أن تدعم تعلم النمذجة من خلال
التمثيل البصري، والمحاكاة، وتحليل البيانات، مما يساعد الطلبة على فهم العلاقات بين المتغيرات بصورة أعمق. وتقيد هذه الدراسة البحث الحالي
في تأكيد دور البرامج التعليمية والرسوم البيانية في جعل المعادلات التفاضلية أكثر وضوحاً عند ربطها بالمشكلات اليومية [10]. وتناول Dager
(2024) العلاقة بين النمذجة الرياضية والممارسات التعليمية في تدريس وتعلم المعادلات التفاضلية العادية، من خلال استراتيجية قائمة على
بناء وحل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى تمثل فرق الجهد في مكثف داخل دائرة كهربائية. وبينت الدراسة أن ربط المعادلات التفاضلية بتطبيقات
فيزيائية وتقنية يساعد الطلبة على فهم دور المعادلة في وصف الظواهر الديناميكية، كما يعزز القدرة على الانتقال من الموقف الواقعي إلى النموذج
الرياضي. وتعد هذه الدراسة قريبة من البحث الحالي لأنها تقدم مثلاً تطبيقياً واضحاً على توظيف المشكلات الواقعية في تعليم المعادلات
التفاضلية [11]. كما بحث Padir (2008) تدريس المعادلات التفاضلية في صفوف متنوعة من خلال مشروعات نمذجة واقعية متعددة
التخصصات. وقد اعتمدت الدراسة على تكليف الطلبة بمشروعات نهائية تتناول مشكلات حياتية أو هندسية يمكن تمثيلها بمعادلات تفاضلية، مع
العمل ضمن فرق متعددة التخصصات. وأظهرت الدراسة أن هذا النوع من المشروعات يعزز مشاركة الطلبة، ويقوي فهمهم للتطبيقات العملية
للمعادلات التفاضلية، ويدعم مهارات التواصل والعمل الجماعي. وتقيد هذه الدراسة البحث الحالي في إبراز أهمية الأنشطة العملية والمشروعات
التطبيقية في تعليم المعادلات التفاضلية [12]. وتناولت Kandasamy and Czoher (2020) العلاقة بين النمذجة الرياضية وبناء المعرفة،
من خلال تحليل نظري يربط بين بناء النموذج الرياضي وبناء الفهم لدى المتعلم. وأكدت الدراسة أن النمذجة الرياضية لا تمثل نشاطاً تطبيقياً
فقط، بل تعد عملية معرفية تساعد المتعلم على تنظيم الخبرة الواقعية وتحويلها إلى بنية رياضية قابلة للفهم والتحليل. وتدعم هذه الدراسة الأساس
النظري للبحث الحالي، إذ توضح أن ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية يمكن أن يسهم في بناء المعرفة الرياضية بصورة أعمق

[13] وبناءً على ما سبق، يتضح أن الدراسات السابقة تتفق على أهمية الانتقال في تدريس المعادلات التفاضلية من التركيز على المعالجة الرمزية إلى بناء الفهم من خلال النمذجة، والسياقات الواقعية، والتمثيلات البصرية والتقنية. كما تكشف هذه الدراسات عن وجود حاجة إلى تصور تعليمي منظم يساعد المعلم على اختيار مشكلات يومية مناسبة، وتحويلها إلى نماذج تفاضلية قابلة للتحليل والتفسير. ومن هنا يأتي البحث الحالي ليسهم في تقديم مدخل عملي يربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية، بوصفها أداة لتعليم الرياضيات بصورة أكثر ارتباطاً بالواقع وأكثر قدرة على تنمية الفهم المفاهيمي والتفكير الرياضي.

مفهوم المعادلات التفاضلية

تُعرّف المعادلات التفاضلية بأنها معادلات تتضمن مشتقات دالة مجهولة، وتُستخدم لوصف العلاقة بين كمية متغيرة ومعدل تغيرها. فإذا كانت $y(t)$ تمثل كمية تتغير مع الزمن t ، فإن:

$$\frac{dy}{dt}$$

يمثل معدل تغير هذه الكمية بالنسبة إلى الزمن. لذلك فإن المعادلة التفاضلية لا تهتم بقيمة y فقط، بل تهتم بكيفية تغيرها والقاعدة التي تحكم هذا التغير. وتكتب المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى غالباً بالصورة العامة:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

حيث تمثل $y(t)$ الدالة المجهولة، ويمثل t المتغير المستقل، أما $f(t, y)$ فتُمثل العلاقة التي تحدد معدل التغير. فإذا كان معدل تغير الكمية يتناسب مع مقدارها الحالي، فإن النموذج يأخذ الصورة:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

حيث k ثابت يحدد طبيعة التغير. فإذا كان $k > 0$ فإن الكمية تزداد مع الزمن، أما إذا كان $k < 0$ فإن الكمية تتناقص مع الزمن. ولكي يكون النموذج التفاضلي كاملاً، لا بد من تحديد قيمة ابتدائية للكمية المدروسة. فإذا كانت قيمة الكمية عند بداية الدراسة هي y_0 فإن الشرط الابتدائي يكتب على الصورة:

$$y(0) = y_0$$

وعند حل النموذج

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

مع الشرط الابتدائي السابق، نحصل على:

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

وهذا الحل يوضح أن سلوك الظاهرة يعتمد على قيمة الثابت k . فعندما يكون k موجباً يظهر نمو أسي، مثل نمو البكتيريا أو زيادة عدد السكان في ظروف مثالية. أما عندما يكون k سالباً فيظهر تناقص أسي، مثل تحلل مادة أو انخفاض كمية معينة مع الزمن. وتنقسم المعادلات التفاضلية إلى نوعين رئيسيين: المعادلات التفاضلية العادية، وهي التي تتضمن مشتقات بالنسبة إلى متغير مستقل واحد، مثل:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

والمعادلات التفاضلية الجزئية، وهي التي تتضمن مشتقات بالنسبة إلى أكثر من متغير مستقل، مثل:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

وتستخدم المعادلات التفاضلية العادية غالباً في دراسة الظواهر التي تتغير مع الزمن فقط، مثل النمو والتبريد والحركة، بينما تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية في الظواهر التي تعتمد على الزمن والمكان معاً، مثل انتقال الحرارة وانتشار الموجات. ومن الناحية التعليمية، تظهر أهمية المعادلات التفاضلية عندما تُعرض بوصفها نموذجاً رياضياً لا مجرد صيغة رمزية. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل تبريد جسم ساخن بالمعادلة:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

حيث تمثل $T(t)$ درجة حرارة الجسم، ويمثل T_s درجة حرارة الوسط المحيط، ويمثل k ثابت التبريد. وتوضح هذه المعادلة أن معدل انخفاض درجة الحرارة يعتمد على الفرق بين درجة حرارة الجسم ودرجة حرارة الوسط. فإذا كان الفرق كبيراً كان التبريد سريعاً، وإذا قل الفرق أصبح التبريد أبطأ. وبذلك تساعد المعادلات التفاضلية الطالب على الانتقال من ملاحظة الظاهرة إلى تمثيلها رياضياً، ثم تفسير سلوكها. فهي لا تقدم طريقة للحل فقط، بل تقدم أداة لفهم التغير، وتحليل أسبابه، والتنبؤ بنتائجه.

ربط المعادلات التفاضلية بالظواهر اليومية

لا يتحقق الفهم العميق للمعادلات التفاضلية من خلال عرض القاعدة الرياضية وحدها، بل من خلال ربطها بظواهر يومية يستطيع الطالب ملاحظتها أو تخيلها. فالظاهرة اليومية تمثل نقطة البداية، ثم تُحدد الكمية المتغيرة، وبعد ذلك يُعبر عن معدل تغيرها باستخدام المشتقة، ثم تُصاغ العلاقة في صورة معادلة تفاضلية. وبهذه الطريقة ينتقل الطالب من الملاحظة الواقعية إلى التمثيل الرياضي، ثم إلى تفسير النتائج. ويمكن توضيح هذا الربط من خلال الجدول رقم ١: أمثلة على ربط المعادلات التفاضلية بالظواهر اليومية

الظاهرة اليومية	الكمية المتغيرة	النموذج التفاضلي	التفسير الرياضي
تبريد جسم ساخن	$(T(t))$	$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$	معدل التبريد يعتمد على الفرق بين حرارة الجسم وحرارة الوسط
نمو بكتيريا أو سكان	$(P(t))$	$\frac{dP}{dt} = rP$	معدل النمو يتناسب مع العدد الحالي
تتناقص مادة مع الزمن	$(A(t))$	$\frac{dA}{dt} = -kA$	كمية المادة تتناقص بمعدل يتناسب مع كميتها الحالية
حركة جسم تحت تأثير قوة	$(v(t))$	$m \frac{dv}{dt} = F$	تغير السرعة ينتج عن القوة المؤثرة في الجسم
انتشار مرض	$(I(t))$	$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$	عدد المصابين يزداد بالعدوى وينقص بالشفاء

تمثل t الزمن، وتمثل $T(t)$ درجة حرارة الجسم عند الزمن t ، ويمثل T_s درجة حرارة الوسط المحيط. كما تمثل $P(t)$ عدد السكان أو الكائنات، وتمثل $A(t)$ كمية المادة، وتمثل $v(t)$ سرعة الجسم، بينما تمثل $I(t)$ عدد المصابين و $S(t)$ عدد الأفراد القابلين للإصابة. أما الثوابت k ، و r ، و β ، و γ فتتمثل عوامل تتحكم في سرعة التغير، مثل ثابت التبريد أو التناقص، ومعدل النمو، ومعدل انتقال العدوى، ومعدل الشفاء. يبين الجدول أن المعادلات التفاضلية تختلف باختلاف طبيعة الظاهرة المدروسة. فإذا كان التغير يعتمد على الكمية نفسها ظهر النموذج الأسّي، مثل:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

أما إذا كان التغير يعتمد على الفرق بين كميتين، كما في تبريد جسم ساخن، فإن النموذج يأخذ الصورة:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

وهذا يوضح أن بناء المعادلة التفاضلية يبدأ من فهم الظاهرة نفسها، وليس من اختيار قانون رياضي جاهز. لذلك فإن توظيف المشكلات اليومية في تدريس المعادلات التفاضلية يساعد الطالب على إدراك معنى الرموز الرياضية، وفهم العلاقة بين المشتقة ومعدل التغير، وربط الحل الرياضي بسلوك الظاهرة في الواقع.

أهمية ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية في تعليم الرياضيات

يمثل ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية مدخلاً مهماً في تعليم الرياضيات، لأنه يساعد على تحويل المفهوم الرياضي من صورة مجردة إلى خبرة تعليمية قريبة من واقع المتعلم. فعندما تُعرض المعادلة التفاضلية من خلال موقف حياتي، مثل تبريد كوب من الماء الساخن أو نمو نبات أو انتشار مرض، يصبح الطالب أكثر قدرة على فهم سبب ظهور المعادلة ومعنى المتغيرات والعلاقات الموجودة فيها. يساعد هذا المدخل على تعزيز الفهم المفاهيمي لدى الطلبة، إذ لا يقتصر التعلم على حفظ خطوات الحل، بل يمتد إلى فهم معنى معدل التغير ودوره في تفسير الظواهر. فالطالب يتعلم أن المشتقة لا تمثل رمزاً رياضياً مجرداً، بل تعبر عن تغير حقيقي يمكن ملاحظته وقياسه. وبذلك يصبح تعلم المعادلات التفاضلية قائماً على الفهم والتحليل بدلاً من الحفظ والتطبيق الآلي. كما يساهم ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية في تنمية مهارات التفكير الرياضي وحل المشكلات. فالطالب يبدأ بملاحظة الظاهرة، ثم يحدد الكميات المتغيرة، ويفكر في العوامل المؤثرة فيها، ثم يربط بين هذه العناصر لبناء نموذج رياضي مناسب. وهذا التسلسل يساعد على تنمية القدرة على التحليل، والاستنتاج، والتفسير، والتنبؤ. ويزيد هذا المدخل من دافعية الطلبة نحو تعلم الرياضيات، لأنهم يدركون أن ما يتعلمونه داخل الصف له علاقة مباشرة بالحياة اليومية. فعندما يرى الطالب أن المعادلات التفاضلية يمكن أن تفسر تبريد المشروبات، أو نمو السكان، أو انتشار الأمراض، أو حركة الأجسام، فإنه يصبح أكثر اقتناعاً بأهمية الرياضيات ودورها في فهم الواقع. ومن جانب المعلم، يوفر هذا المدخل طريقة عملية لتنظيم الدرس، إذ يمكن أن يبدأ المعلم بمشكلة يومية بسيطة، ثم يقود الطلبة تدريجياً نحو تحديد المتغيرات وبناء النموذج الرياضي وتفسير النتائج. وبذلك يتحول درس المعادلات التفاضلية من عرض نظري مجرد إلى نشاط تعليمي قائم على الملاحظة والنقاش والتحليل. وعليه، فإن ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية لا يهدف فقط إلى تبسيط المحتوى الرياضي، بل يسعى إلى جعل تعلم الرياضيات أكثر ارتباطاً بالواقع، وأكثر قدرة على تنمية الفهم العميق والتفكير المنطقي لدى الطلبة.

منهجية البحث

يعتمد هذا البحث على المنهج الوصفي التحليلي، بوصفه المنهج الأنسب لطبيعة الموضوع وأهدافه، إذ يسعى البحث إلى وصف العلاقة بين المعادلات التفاضلية والمشكلات اليومية، ثم تحليل كيفية توظيف هذه العلاقة في تعليم الرياضيات. ولا يهدف البحث إلى إجراء تجربة ميدانية على عينة من الطلبة، بل يركز على بناء تصور علمي وتربوي يوضح كيفية تحويل الظواهر اليومية القائمة على التغير إلى نماذج تفاضلية قابلة للفهم والتحليل والتفسير داخل البيئة التعليمية. يقوم المنهج الوصفي التحليلي في هذا البحث على دراسة المفاهيم الأساسية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية، مثل مفهوم التغير، ومعدل التغير، والمشتقة، والنموذج الرياضي، ثم ربط هذه المفاهيم بسياقات حياتية مألوفة يمكن أن تمثل مدخلاً مناسباً لتعليم الرياضيات. ويُنظر إلى المعادلة التفاضلية في هذا السياق بوصفها أداة تفسيرية تساعد على فهم الظواهر المتغيرة، لا مجرد صيغة رمزية تُستخدم للحل الجبري. ومن ثم فإن التحليل لا يقتصر على الجانب الرياضي وحده، بل يمتد إلى الجانب التعليمي الذي يوضح كيف يمكن للطلبة أن ينتقل من ملاحظة الظاهرة إلى فهم بنيتها الرياضية. وتعتمد منهجية البحث كذلك على النمذجة الرياضية بوصفها إطاراً منظماً للانتقال من المشكلة الواقعية إلى التمثيل الرياضي. فالنمذجة الرياضية تتيح تحويل الموقف اليومي إلى صورة رياضية من خلال تحديد عناصره الأساسية، واختيار المتغيرات المناسبة، وتحليل العلاقة بين الكمية المتغيرة ومعدل تغيرها، ثم صياغة هذه العلاقة في صورة معادلة تفاضلية. وبذلك تصبح النمذجة حلقة وصل بين الواقع والرياضيات، لأنها تساعد على تفسير الظاهرة بلغة رياضية مع المحافظة على معناها الواقعي والتعليمي.

وتسير إجراءات البحث وفق الخطوات الآتية:

أولاً: تحديد الظواهر اليومية المناسبة

تبدأ إجراءات البحث بتحديد مجموعة من الظواهر اليومية التي تتضمن تغيراً مستمراً مع الزمن، مثل تبريد الأجسام، ونمو الكائنات الحية، وانتشار الأمراض، وحركة الأجسام، وتناقص بعض الكميات مع مرور الزمن. وقد اختيرت هذه الظواهر لأنها قريبة من خبرة المتعلم، ويمكن ملاحظتها أو تخيلها بسهولة، كما أنها تمثل نماذج مناسبة لتوضيح معنى معدل التغير. ويساعد اختيار هذه الأمثلة على جعل موضوع المعادلات التفاضلية أكثر ارتباطاً بالواقع، وأكثر قابلية للفهم من قبل الطلبة.

ثانياً: تحديد المتغيرات والعوامل المؤثرة

بعد تحديد الظاهرة اليومية، يتم الانتقال إلى تحديد المتغيرات المرتبطة بها، وفي مقدمتها الكمية المتغيرة والزمن والعوامل المؤثرة في معدل التغير. فعلى سبيل المثال، في ظاهرة تبريد جسم ساخن تكون درجة الحرارة هي الكمية المتغيرة، والزمن هو المتغير المستقل، بينما يمثل الفرق بين درجة حرارة الجسم ودرجة حرارة الوسط العامل المؤثر في سرعة التبريد. ويساعد هذا التحليل على تدريب الطالب على قراءة الظاهرة رياضياً، بدل التعامل معها بوصفها وصفاً لفظياً فقط.

ثالثاً: صياغة العلاقة الرياضية

تأتي بعد ذلك خطوة صياغة العلاقة الرياضية، وفيها يتم التعبير عن العلاقة بين الكمية المتغيرة ومعدل تغيرها باستخدام مفهوم المشتقة. وتعد هذه الخطوة جوهرية في البحث، لأنها تمثل لحظة الانتقال من اللغة اليومية إلى اللغة الرياضية. فالطالب لا يُعطى المعادلة جاهزة، بل يُوجَّه إلى فهم سبب ظهورها، ومعنى الرموز الموجودة فيها، والعلاقة بين كل حد من حدودها والظاهرة الأصلية. وهذا يجعل المعادلة التفاضلية نتيجة لتحليل المشكلة، لا مجرد قانون محفوظ.

رابعاً: تحليل النموذج التفاضلي

تتضمن المنهجية بعد ذلك تحليل النموذج التفاضلي الناتج من حيث معناه الرياضي والتربوي. ويشمل هذا التحليل تحديد نوع التغير الذي تمثله المعادلة، وبيان ما إذا كانت الظاهرة تتجه نحو النمو، أو التناقص، أو الاستقرار، أو التباطؤ. كما يتم تفسير دلالة الثوابت والمتغيرات داخل النموذج، لأن فهم هذه الرموز يساعد الطالب على إدراك أن كل جزء في المعادلة يقابله معنى واقعي في الظاهرة المدروسة.

خامساً: تفسير النموذج في ضوء المشكلة الأصلية

تُختتم خطوات المنهجية بتفسير النموذج في ضوء المشكلة اليومية التي انطلق منها البحث. ففي هذه المرحلة لا يُنظر إلى الحل الرياضي بوصفه نتيجة نهائية منفصلة، بل بوصفه تفسيراً لسلوك الظاهرة. فالهدف ليس الوصول إلى معادلة فقط، بل فهم ما الذي تعنيه هذه المعادلة، وكيف تساعد على تفسير التغير، وكيف يمكن استخدامها في التنبؤ بسلوك الظاهرة مستقبلاً. وهذا التفسير يمثل الجانب التعليمي الأهم في البحث، لأنه يربط بين المعرفة الرياضية المجردة والخبرة الواقعية للمتعلم. وبذلك تجمع منهجية البحث بين التحليل الرياضي والتحليل التربوي؛ فهي من جهة تدرس المعادلات التفاضلية بوصفها أدوات لنمذجة الظواهر المتغيرة، ومن جهة أخرى تبحث في كيفية توظيف هذه الأدوات في تعليم الرياضيات بصورة أكثر فاعلية. وتتمثل قيمة هذه المنهجية في أنها لا تقدم المعادلات التفاضلية كموضوع نظري مستقل، بل تعرضها ضمن سياق تطبيقي يساعد على تنمية الفهم المفاهيمي، وتعزيز التفكير الرياضي، وربط التعلم بالمشكلات اليومية التي يواجهها الطالب في حياته.

نموذجة تطور إتقان طلبة قسم الرياضيات لموضوع المعادلات التفاضلية

يمكن توظيف المعادلات التفاضلية في دراسة تطور مستوى فهم الطلبة لموضوع رياضي معين، مثل موضوع المعادلات التفاضلية في قسم الرياضيات / الكلية التربوية المفتوحة / مركز ديالى الدراسي. وتتمثل المشكلة التعليمية هنا في أن عدداً من الطلبة يواجهون في بداية دراسة الموضوع صعوبة في فهم معنى المعادلة التفاضلية، وخصوصاً العلاقة بين الكمية المتغيرة ومعدل تغيرها. ومع استمرار التدريس، واستخدام الأمثلة التطبيقية، والتمثيلات البيانية، والأنشطة الصفية، يبدأ عدد الطلبة الذين يحققون فهماً مقبولاً للموضوع بالازدياد تدريجياً. لا يكون تطور الفهم لدى الطلبة عادةً مفاجئاً أو ثابتاً، بل يحدث بصورة تدريجية. ففي بداية التدريس يكون عدد الطلبة الذين أُنقنوا المفهوم قليلاً، ثم يزداد هذا العدد مع مرور الوقت نتيجة الشرح والتدريب والمناقشة. ولكن هذه الزيادة لا تستمر بلا حدود؛ لأن عدد الطلبة في الشعبة محدود. فإذا كان عدد طلبة الشعبة مثلاً K ، فإن عدد الطلبة الذين يمكن أن يصلوا إلى الإتقان لا يمكن أن يتجاوز هذا العدد. لذلك فإن الظاهرة التعليمية هنا تشبه نموّاً تدريجياً محدوداً بسقف أعلى. لتمثيل هذه المشكلة رياضياً، نرسم إلى عدد الطلبة الذين أُنقنوا فهم المعادلات التفاضلية بعد مرور زمن t بالرمز:

$$M(t)$$

حيث يمثل t الزمن، ويمكن قياسه بالأسابيع أو بعدد المحاضرات. أما K فيمثل العدد الكلي لطلبة الشعبة، ويمثل الفرق عدد الطلبة الذين لم يصلوا بعد إلى مستوى الإتقان المطلوب

$$K - M(t)$$

في هذا النموذج، نفترض أن معدل زيادة عدد الطلبة المتقنين يعتمد على عدد الطلبة الذين لم يتقنوا الموضوع بعد. فكلما كان عدد الطلبة غير المتقنين كبيراً، كانت فرصة تحسن العدد أكبر نتيجة التدريس والتدريب. أما عندما يقترب معظم الطلبة من الإتقان، فإن الزيادة تصبح أبطأ؛ لأن عدد الطلبة المتقنين الذين يحتاجون إلى دعم يصبح أقل.

بناءً على ذلك، يمكن صياغة النموذج التفاضلي الآتي:

$$\frac{dM}{dt} = a(K - M)$$

حيث تمثل:

t	الزمن	عند	الموضوع	أتقنوا	الذين	الطلبة	عدد: M(t)
							K: العدد الكلي لطلبة الشعبة
							K-M
							عدد: .
							a
							معدل زيادة عدد الطلبة المتقنين مع الزمن.

توضح هذه المعادلة أن عدد الطلبة المتقنين يزداد مع الزمن، ولكن سرعة هذه الزيادة تعتمد على عدد الطلبة الذين لم يتقنوا بعد. فإذا كان عدد الطلبة غير المتقنين كبيراً، يكون معدل التحسن أكبر. أما إذا أصبح معظم الطلبة متقنين، فإن معدل التحسن يقل تدريجياً. وهذا يتفق مع الواقع التعليمي؛ لأن التحسن يكون واضحاً في المراحل الأولى من التدريس، ثم يصبح أبطأ عندما يقترب الصف من مستوى إتقان عالٍ. إذا كان عدد طلبة الشعبة في قسم الرياضيات هو:

$$K=40$$

وكان عدد الطلبة الذين يمتلكون فهماً أولياً جيداً للموضوع في بداية التدريس هو:

$$M(0)=8$$

فإن هذا يعني أن عدد الطلبة الذين لم يتقنوا الموضوع في البداية هو:

$$40-8=32$$

أي إن هناك مجالاً كبيراً للتحسن. ومع استمرار التدريس باستخدام المشكلات اليومية والنمذجة الرياضية والتمثيلات البيانية، يبدأ عدد الطلبة المتقنين بالزيادة.

الحل العام للنموذج يكون:

$$M(t)K = (K - M_0)e^{-at}$$

وبالتعويض نحصل:

$$M(t)K = 40 - 32 e^{-at}$$

إذا افترضنا أن معامل فاعلية التدريس هو $a=0.35$ ، فإن النموذج يصبح:

الزمن (t) بالأسابيع	عدد الطلبة المتقنين تقريباً (M(t))
0	8
1	17
2	24
3	29
4	32
5	34
6	36

يبين الجدول أن عدد الطلبة الذين أتقنوا الموضوع يزداد من ٨ طلاب في بداية التدريس إلى نحو 36 طالباً بعد ستة أسابيع. ولكن الزيادة ليست ثابتة؛ فهي تكون أكبر في الأسابيع الأولى، ثم تبدأ بالتباطؤ تدريجياً. وهذا يوضح أن النموذج لا يصف عدد الطلبة فقط، بل يفسر طبيعة تطور التعلم داخل الصف. وتتمثل فائدة بناء هذه المعادلة في أنها تساعد المعلم أو الباحث على فهم تطور تعلم الطلبة بصورة كمية. فبدلاً من القول إن مستوى الطلبة "تحسن" بصورة عامة، نستطيع تمثيل هذا التحسن بنموذج رياضي يوضح معدل الزيادة في عدد الطلبة المتقنين. كما يمكن استخدام النموذج في مقارنة طرائق التدريس المختلفة؛ فإذا كان معامل الفاعلية a أكبر، فهذا يدل على أن طريقة التدريس أكثر قدرة على رفع مستوى

الإلتقان خلال مدة زمنية أقصر. ومن الناحية التربوية، يوضح هذا المثال أن المعادلات التفاضلية لا تستخدم فقط في الفيزياء والهندسة والعلوم الطبيعية، بل يمكن توظيفها أيضًا في تحليل مشكلات تعليمية. فعملية التعلم نفسها يمكن النظر إليها بوصفها ظاهرة تتغير مع الزمن، وتتأثر بعوامل متعددة مثل طريقة التدريس، وعدد الأنشطة، ومستوى تفاعل الطلبة، والتغذية الراجعة التي يقدمها المعلم. كما يساعد هذا النموذج على إبراز دور المعادلات التفاضلية في اتخاذ قرارات تعليمية. فإذا لاحظ المعلم أن عدد الطلبة المتقنين يزداد ببطء، فإن ذلك قد يدل على ضعف فاعلية طريقة التدريس أو الحاجة إلى أنشطة إضافية. أما إذا كان معدل التحسن مرتفعًا، فهذا يشير إلى أن ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية والتمثيلات البصرية قد أسهم في تسهيل الفهم. ويمكن الاستفادة من هذا النموذج في تصميم الدرس أيضًا. ففي بداية تدريس الموضوع، يحتاج المعلم إلى التركيز على بناء المفهوم الأساسي للمعادلة التفاضلية، مثل معنى معدل التغير ودلالة المشتقة. وبعد ذلك يمكن الانتقال إلى الأمثلة التطبيقية والأنشطة الصفية. ومع تقدم الزمن، يمكن تقليل الشرح المباشر وزيادة مهام التحليل والتفسير؛ لأن عددًا أكبر من الطلبة يكون قد وصل إلى مستوى فهم أعلى. ويظهر هذا المثال أن المعادلة التفاضلية ليست مجرد أداة لحل مسائل رياضية، بل يمكن أن تكون وسيلة لفهم عملية تعليمية داخل قسم الرياضيات. فهي تساعد على تمثيل تطور الفهم، وتحليل أثر التدريس، والتنبؤ بمستوى الإلتقان المتوقع بعد مدة معينة. وبذلك يخدم المثال هدف البحث؛ لأنه يربط المعادلات التفاضلية بمشكلة تعليمية واقعية، ويبين كيف يمكن استخدامها كمدخل عملي لتعليم الرياضيات بطريقة أكثر فهمًا وتنظيمًا.

نتائج البحث ومناقشتها

أظهر البحث أن ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية يساهم في تحويل تعلمها من الحفظ والإجراءات الرمزية إلى الفهم والتحليل والتفسير. فعندما يبدأ الطالب من موقف واقعي أو تعليمي قريب من خبرته، ثم ينتقل إلى تحديد المتغيرات وبناء العلاقة الرياضية، يصبح أكثر قدرة على فهم معنى المعادلة التفاضلية ودور المشتقة في وصف معدل التغير. كما بيّن البحث أن النمذجة الرياضية تمثل أداة تعليمية فعالة في تدريس المعادلات التفاضلية، لأنها تساعد الطالب على الانتقال من ملاحظة الظاهرة إلى صياغتها رياضيًا ثم تفسيرها. وهذا التسلسل يقلل من الطابع المجرد للموضوع، ويجعل كل رمز في المعادلة مرتبطًا بمعنى واضح داخل الظاهرة المدروسة. وأظهر البحث كذلك أن توضيح معنى الرموز الرياضية يعزز الفهم المفاهيمي لدى الطلبة. فعندما يدرك الطالب أن $y(t)$ تمثل كمية متغيرة، وأن $\frac{dy}{dt}$ مثل معدل تغيرها، يصبح قادرًا على قراءة النموذج وفهمه قبل البدء بحله. وهذا يساعده على التعامل مع المعادلة بوصفها أداة تفسيرية لا مجرد صيغة للحساب. وتشير النتائج أيضًا إلى أن استخدام المشكلات اليومية يزيد من دافعية الطلبة نحو تعلم الرياضيات، لأنه يوضح لهم أن المعادلات التفاضلية ليست موضوعًا مجردًا بعيدًا عن الواقع، بل وسيلة لفهم ظواهر متغيرة مثل النمو، والتبريد، والحركة، وانتشار الأمراض، بل وحتى تطور التعلم نفسه داخل البيئة التعليمية. وبناءً على ذلك، يتضح أن ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية يحقق فائدة مزدوجة؛ فهو يسهّل فهم المفاهيم الرياضية من جهة، ويحافظ على الطابع العلمي للنموذج الرياضي من جهة أخرى. كما يساعد هذا المدخل على تنمية التفكير الرياضي، ومهارات التحليل، والتفسير، والتنبؤ لدى الطلبة.

الاستنتاجات

١. إن ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية يساعد على تحويلها من صيغ رمزية مجردة إلى نماذج رياضية قابلة للفهم والتفسير.
٢. يساهم هذا المدخل في تعزيز فهم الطلبة لمفهوم التغير ومعدل التغير، لأنه يربط بين المشتقة والظواهر الواقعية التي تتغير مع الزمن.
٣. تساعد النمذجة الرياضية على تنظيم تعلم المعادلات التفاضلية من خلال الانتقال المتدرج من ملاحظة الظاهرة، إلى تحديد المتغيرات، ثم صياغة النموذج الرياضي وتفسيره.
٤. إن توضيح معنى الرموز الرياضية داخل المعادلة التفاضلية يعد خطوة أساسية في بناء الفهم المفاهيمي لدى الطلبة.
٥. يقلل ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية من الطابع المجرد للموضوع، ويجعل تعلمه أكثر قربًا من خبرات الطلبة وواقعهم.
٦. يساهم استخدام الأمثلة التطبيقية والجداول والتمثيلات البصرية في تحسين قدرة الطلبة على فهم سلوك الحلول وتفسير اتجاه التغير.
٧. يساعد هذا المدخل على تنمية مهارات التفكير الرياضي، مثل التحليل، والاستنتاج، والتفسير، والتنبؤ.
٨. يزيد توظيف المشكلات اليومية من دافعية الطلبة نحو تعلم الرياضيات، لأنه يوضح لهم أهمية المعادلات التفاضلية في فهم الظواهر المتغيرة.
٩. يوضح البحث أن المعادلات التفاضلية لا تقتصر على الاستخدامات النظرية، بل يمكن توظيفها أيضًا في تحليل مشكلات تعليمية وحياتية متنوعة.

١٠. يمثل ربط المعادلات التفاضلية بالمشكلات اليومية مدخلاً عملياً مناسباً لتعليم الرياضيات بصورة أكثر فهماً وارتباطاً بالواقع.

التوصيات

١. ربط المعادلات التفاضلية بمشكلات يومية واقعية عند تدريسها، وعدم الاكتفاء بالعرض الرمزي المجرد .

٢. اعتماد النمذجة الرياضية في الدرس، من خلال الانتقال من المشكلة إلى المتغيرات ثم إلى النموذج التفاضلي .

٣. توضيح معنى الرموز الرياضية داخل كل معادلة تفاضلية وربطها بالظاهرة المدروسة .

٤. استخدام الجداول والرسوم البيانية لتوضيح سلوك الحلول واتجاه التغير .

٥. تشجيع الطلبة على تفسير الحل الرياضي في ضوء المشكلة الأصلية .

٦. إجراء دراسات تطبيقية لاحقة لقياس أثر هذا المدخل في فهم الطلبة للمعادلات التفاضلية.

المصادر

- [1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and D. B. Meade, *Boyce's Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 12th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2024.
- [2] E. Lozada, C. Guerrero-Ortiz, A. Coronel, and R. Medina, "Classroom methodologies for teaching and learning ordinary differential equations: A systemic literature review and bibliometric analysis," *Mathematics*, vol. 9, no. 7, Art. no. 745, 2021, doi: 10.3390/math9070745.
- [3] E. Lozada, C. Guerrero-Ortiz, A. Coronel, and R. Medina, "Classroom methodologies for teaching and learning ordinary differential equations: A systemic literature review and bibliometric analysis," *Mathematics*, vol. 9, no. 7, Art. no. 745, 2021, doi: 10.3390/math9070745.
- [4] E. Lozada, C. Guerrero-Ortiz, A. Coronel, and R. Medina, "Proposal of a mathematical modelling activity to facilitate students' learning of ordinary differential equation concepts," *Sustainability*, vol. 15, no. 16, Art. no. 12483, 2023, doi: 10.3390/su151612483.
- [5] M. Latifi, A. Esegir, A. Elmaroufi, K. Hattaf, and N. Achtaich, "Modeling with differential equations and GeoGebra in high school mathematics education," *Journal of Educational and Social Research*, vol. 12, no. 3, pp. 47–59, 2022, doi: 10.36941/jesr-2022-0065.
- [6] B. Winkel, "Teaching differential equations through a modeling first approach," *Journal of Humanistic Mathematics*, vol. 6, no. 2, pp. 241–241, 2016, doi: 10.5642/jhummath.201602.22.
- [7] O. N. Kwon, "Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations," *ERIC*, ED472048, 2002.
- [8] M. Huber, "Teaching differential equations with modeling and visualization," *CODEE Journal*, vol. 7, no. 1, Art. no. 3, 2010.
- [9] E. A. Guzorovich, "Mathematical modeling and practice of differential equations," *International Journal of Research*, vol. 7, no. 3, 2020.
- [10] K. C. Ang, "Teaching and learning mathematical modelling with technology," in *Proceedings of the 15th Asian Technology Conference in Mathematics, Kuala Lumpur, Malaysia, 2010*, pp. 19–29.
- [11] E. L. A. Dager, V. M. Uribe Villegas, and M. G. Domínguez Pombo, "Mathematical modeling in teaching-learning ordinary differential equations: A case study of series electric circuits," *Journal of Hunan University Natural Sciences*, vol. 51, no. 6, 2024, doi: 10.55463/issn.1674-2974.51.6.5.
- [12] T. Padir, K. O. Muller, and C. Coullard, "Teaching differential equations in a diverse classroom," in *Proceedings of the 2008 ASEE Annual Conference & Exposition, Pittsburgh, PA, USA, 2008*.
- [13] S. S. Kandasamy and J. A. Czoher, "How mathematical modeling enables learning?" in *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2020*.